

**Examen : Analyse Numérique**

**Exercice 1.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\rho(A) < 1$  si et seulement si  $A^k \rightarrow 0$  pour  $k \rightarrow \infty$ .

**Exercice 2.** On s'intéresse à la méthode de décomposition QR d'une matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  de rang  $n$ .

1. Décrire le principe de la méthode par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.
2. Ecrire l'algorithme correspondant

**Exercice 3.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. Montrer qu'il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  $PA$  admette une décomposition LU en appliquant un théorème du cours.
2. Déterminer cette matrice de permutation  $P$  et la décomposition LU de  $A$ .

**Exercice 4.** Soit le système  $Ax = b$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que ce système n'a pas de solution.
2. Afin de trouver une solution au sens des moindres carrés, écrire l'équation normale du système linéaire précédent.
3. Déterminer les solutions de l'équation normale. Trouver la solution de norme minimale.
4. Ecrire la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A$ .
5. Calculer l'inverse généralisé de  $A$ , notée  $A^\dagger$ .
6. Calculer  $A^\dagger b$ .
7. Conclure.

**Tournez la page SVP**

**Exercice 5.**

1. Etudier les variations de  $f(x) = xe^x$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et montrer que  $f$  est une bijection de  $[0, \infty[$  sur lui-même.

Etant donné  $a > 0$  on notera  $\alpha > 0$  l'unique solution de  $f(\alpha) = a$ .

2. Soit  $N(x) = x - \frac{f(x) - a}{f'(x)}$ . Montrer que  $N$  est bien définie pour  $x \geq 0$ .
3. Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ , il existe  $c \in I(\alpha, x)$  tel que

$$N(x) = \alpha + \frac{1}{2}(\alpha - x)^2 \frac{f''(c)}{f'(x)}$$

où  $I(\alpha, x)$  désigne l'intervalle fermé d'extrémités  $\alpha$  et  $x$ . En déduire que, pour tout  $x \geq 0$ , on a  $N(x) \geq \alpha$ . Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor appliquée à  $f$ .

Notons  $x_0 \geq 0$  un réel donné et, pour tout  $k \geq 0$ ,  $x_{k+1} = N(x_k)$ .

4. Montrer que la suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  est décroissante, qu'elle converge, calculer sa limite.
5. Montrer que, pour tout  $x \geq \alpha$ ,

$$0 \leq N(x) - \alpha \leq \frac{(\alpha + 2)(\alpha - x)^2}{2(\alpha + 1)}$$

et en déduire que, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$0 \leq x_k - \alpha \leq (x_1 - \alpha)2^{k-1}.$$